



fichas de Trabajo

MATEMÁTICA

FUNCIONES ESPECIALES

5^{to}

SECUNDARIA

Cálculo del dominio y el rango de una función

En la función f real de variable real, si $(x; y) \in f$, su regla de correspondencia es $y = f(x)$. Consideremos lo siguiente:

- ▶ Calcular el dominio consiste en encontrar todos los valores reales de « x » para que la función esté bien definida en los reales.
- ▶ Calcular el rango de la función consiste en encontrar todos los valores reales de « y » o « $f(x)$ » a partir del dominio.

I. Función lineal $f(x) = mx + b; m \neq 0$

Sin dominio restringido	Con dominio restringido
Si $f(x) = -4x + 5$, entonces $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ $\text{Ran}f = \mathbb{R}$	Si $f(x) = -4x + 5, x \in \langle -2; 3 \rangle$ Entonces: $\text{Dom}f = \langle -2; 3 \rangle$ Para el rango $(-2 < x \leq 3) \times -4$ $(-12 \leq -4x < 8) + 5$ $-7 \leq 4x + 5 < 13$ $\therefore \text{Ran}f = [-7; 13)$

II. Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$

Sin dominio restringido	Con dominio restringido
Usaremos el $h = \frac{-b}{2a}$ $k = f(h)$ para el cálculo del rango. Entonces, tenemos: ▶ $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ ▶ $\text{Ran}f = [k; +\infty); a > 0$ $\text{Ran}f = \langle -\infty; k]; a < 0$ $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ $a = -1$ $h = \frac{-2}{2(-1)} = 1$ $k = f(1) = 4$ entonces, $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ $\text{Ran}f = \langle -\infty; 4]$	Se busca completar cuadrados $f(x) = a(x - h)^2 + k$ $f(x) = x^2 + 6x + 3; x \in \langle 1; 5 \rangle$ c o m p l e t a n d o cuadrados $f(x) = (x + 3)^2 - 6 \wedge$ como $x \in \langle 1; 5 \rangle$ entonces tenemos: $(1 < x \leq 5) + 3$ $(4 < x + 3 \leq 8)^2$ $(16 < (x + 3)^2 \leq 64) - 6$ $10 < (x + 3)^2 - 6 \leq 58$ $\therefore \text{Ran}f = \langle 10; 58]$

III. Función racional $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

Sin dominio restringido	Con dominio restringido
▶ Para el cálculo de dominio: $cx + d \neq 0 \Rightarrow$ $x \neq -d/c$ $\therefore \text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-d/c\}$ ▶ Para el cálculo del rango: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, despeja « x » $\Rightarrow x = \frac{-dx+b}{cy-a}$ $cy - a \neq 0$ $\Rightarrow y \neq a/c$ $\therefore \text{Ran}f = \mathbb{R} - \{a/c\}$	Se debe construir el rango utilizando las propiedades de desigualdades, a partir del dominio que lo tenemos como dato: Ejemplo: Si $f(x) = \frac{x+5}{x+3}; x \in \langle 4; 8 \rangle$ Se sabe lo siguiente: $y = \frac{x+5}{x+3} \Rightarrow y = 1 + \frac{2}{x+3}$ Construimos « y » a partir de $x \in \langle 4; 8 \rangle$ $(4 < x \leq 8) + 3$ $(7 < x + 3 \leq 11)$ inversa $\left(\frac{1}{11} \leq \frac{1}{x+3} < \frac{1}{7}\right) \times 2$ $\left(\frac{2}{11} \leq \frac{2}{x+3} < \frac{2}{7}\right) + 1$ $\frac{13}{11} \leq 1 + \frac{2}{x+3} < \frac{9}{7}$ $\text{Ran}f = [13/11; 9/7)$

IV. Función raíz cuadrada $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$

- ❖ Para el cálculo del dominio:
 $x - h \geq 0 \Rightarrow x \geq h$
Entonces, $\text{Dom}f = [h; +\infty)$
- ❖ Para el cálculo del rango:
Partimos de $\sqrt{x-h} \geq 0$
 $a\sqrt{x-h} \geq 0; a \geq 0 \Rightarrow a\sqrt{x-h} + k \geq k \Rightarrow R_f = [k; +\infty)$
 $a\sqrt{x-h} \leq 0; a < 0 \Rightarrow a\sqrt{x-h} + k \leq k \Rightarrow R_f = \langle -\infty; k]$

Esquema formulario

Función lineal

$$F(x) = mx + b$$

$$\text{Dom}f = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}f = \mathbb{R}$$

Función cuadrática

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$

$$V = (h; k), \text{ donde } h = -\frac{b}{2a}$$

$$\text{Dom}f = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}f = [K; +\infty); \text{ si } a > 0$$

$$\text{Ran}f = \langle -\infty; K]; \text{ si } a < 0$$

Si hay restricciones para «x», se debe construir el f(x) utilizando propiedades de desigualdades.

Función racional

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$\text{Dom}f = cx + d \neq 0$$

$$x \neq -d/c$$

$$\text{Df} = \mathbb{R} - \{-d/c\}$$

$$\text{Rom}f: \mathbb{R}f = \mathbb{R} - \{a/c\}$$

Función raíz cuadrada

$$f(x) = a\sqrt{x-h} + k$$

$$\text{Dom}f: x - h \geq 0$$

$$x \geq h$$

$$\text{Df} = [h; +\infty)$$

$$\text{Ram}f: a\sqrt{x-h} \geq 0; a > 0$$

$$\underbrace{a\sqrt{x-h} + k}_{f(x)} \geq k$$

$$\text{Rf} = [k; +\infty)$$

$$a\sqrt{x-h} \leq 0; \text{ con } a < 0$$

$$\underbrace{a\sqrt{x-h} + k}_{f(x)} \leq k$$

$$\text{Rf} = \langle -\infty; k]$$

Trabajando en Clase

Nivel I

1. Calcula el rango de $f(x) = 3x - 2$; si $x \in \langle -4; 5]$
2. Calcula el rango de $f(x) = \frac{-x}{4} + 3$; si $x \in [-8; 2]$
3. Determina el máximo valor de la función:
 $G(x) = -4x^2 + 8x$
4. Calcula el mínimo valor de: $f(x) = 2x^2 - x + 20$
5. Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 8$, determina: $\text{Dom}f \cap \text{Ran}f$
6. Calcula el rango de $f(x) = x^2 + 6x - 1$; si $x \in \langle -5; 2]$
7. Calcula el rango de $f(x) = x^2 - 2x$; si $x \in \langle -4; -1]$

Nivel II

8. Sea $f: [0; 3) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$,
determina el rango de «f».

9. Sea $f: \langle 3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$,
determina el rango de f.

10. Calcula el rango de la función: $f(x) = \frac{5x+1}{2x-3}$

11. Dada la función: $f(x) = \frac{5x^2-7x-6}{x+\frac{3}{5}}$, definida
sobre $\left\langle -\frac{3}{5}; \frac{3}{5} \right]$, calcula el rango de f.

12. Calcula el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{8-x}}$$

Tarea domiciliaria N° 11

1. Calcula el rango de $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$; si $x \in [-6; 3]$.

- a) $[-10; 2]$ b) $\langle -2; 10]$ c) $\langle -6; 2]$
d) $\langle -10; 2]$ d) $[-6; 2]$

2. Calcula el rango de $f(x) = -x + 3$; si $x \in \langle -2; 3 \rangle$.

- a) $\langle 0; 7 \rangle$ b) $\langle -1; 6 \rangle$ c) $\langle 0; 4 \rangle$
d) $\langle 0; 5 \rangle$ e) $\langle 0; 1 \rangle$

3. Determina el rango de la función: $f(x) = -x^2 + 2x$, sabiendo que su dominio es igual al conjunto de los números reales.

- a) $\langle -\infty; 1]$ b) $\langle -\infty; -1]$ c) $\langle -6; 2]$
d) $\langle -\infty; 0]$ e) $\langle -\infty; +\infty \rangle$

4. Si $f(x) = x^2 - 4x + 1$, indica el menor valor entero del rango.

- a) -2 b) 1 c) 5
d) 2 e) -3

5. Calcula el rango de $f(x) = x^2 + 8x - 7$; si $x \in \langle -6; 2 \rangle$.

- a) $\langle -19; 13 \rangle$ b) $[-23; 13]$ c) $\langle -23; 13 \rangle$
d) $[-23; 13]$ e) $[-23; 13]$

6. Calcula el valor de «a - b», si $f(x) = x^2 - 6x$; $x \in \langle -5; -2 \rangle$; además, el $\text{Ran} f = [a; b]$.

- a) 89 b) 41 c) 36
d) -39 e) 27

7. Calcula el rango de la función:
 $f(x) = x^2 + 8x + 6$, si $x \in \langle -2; 4 \rangle$

- a) $\langle -6; 54 \rangle$ b) $[0; 54]$ c) $\langle -2; 4 \rangle$
d) $\langle -54; 6 \rangle$ e) $\langle -54; 6 \rangle$

8. Calcula el rango de $f: \langle -4; 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, definida por
 $f(x) = 3x^2 - 2$

- a) $[-2; 46]$ b) $\langle 10; 48 \rangle$ c) $\langle 12; 46 \rangle$
d) $\langle 10; 46 \rangle$ e) $[-2; 46]$