



fichas de Trabajo

MATEMÁTICA

5^{to}

SECUNDARIA

DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Objetivos:

- ✓ Definir la circunferencia.
- ✓ Diferenciar entre círculo y circunferencia.
- ✓ Conocer la aplicación en la realidad.

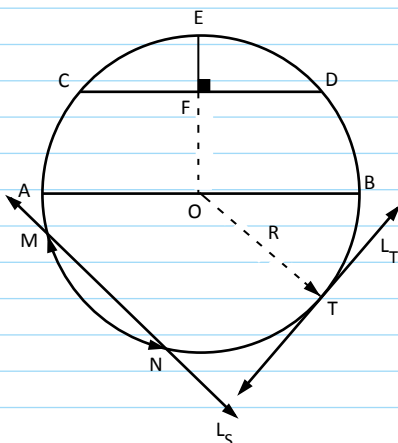
Introducción

El hombre, debido a su interacción con la realidad, descubrió la rueda. Los caldeos hacia el tercer milenio a.C., dieron la división del círculo en 360 partes. Ellos tomaron por base la división del año en 360 días. Así les era fácil dividir el círculo y la circunferencia en 6 partes iguales.

Definición

La circunferencia es un conjunto de puntos de un plano que equidista de otro punto denominado centro. A la distancia de estos puntos se le denomina radio de la circunferencia.

Líneas Asociadas a la Circunferencia

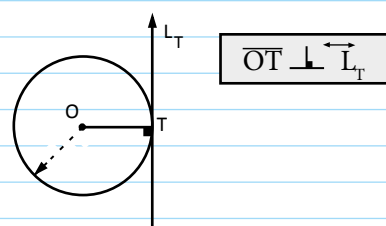


Se tiene la circunferencia de centro "O" y de radio "R".

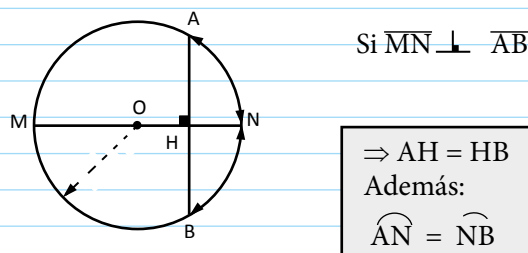
- Cuerda: $\overline{CD}$
- Diámetro: $\overline{AB}$
- Flecha o Sagita: $\overline{EF}$
- Recta Tangente: $\overleftrightarrow{L_T}$
- Recta Secante: $\overleftrightarrow{L_S}$
- Arco: Es una porción de la circunferencia determinada por dos puntos de la misma, denominados extremos del arco.
- Arco: $\widehat{MN}$

Propiedades fundamentales en toda circunferencia

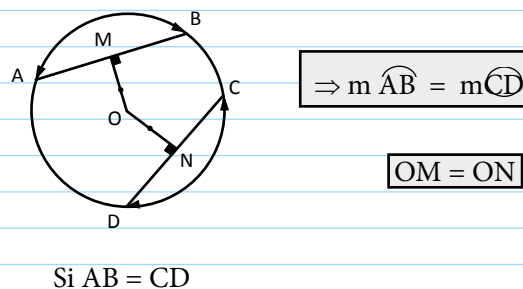
- **Teorema I :** La recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio trazado en el punto de tangencia.



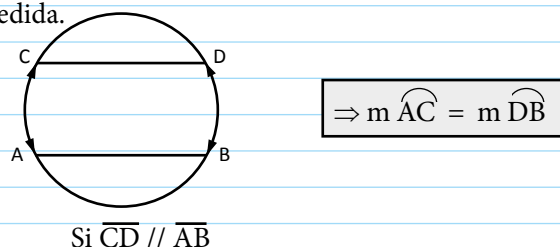
- **Teorema II :** Todo diámetro, perpendicular a una cuerda, biseca a dicha cuerda y a su arco.



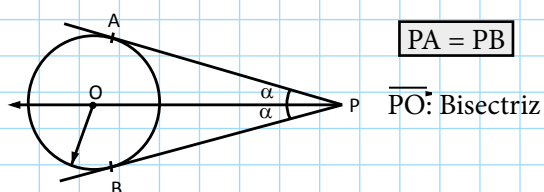
- **Teorema III :** Dos cuerdas de igual longitud generan arcos de igual medida.



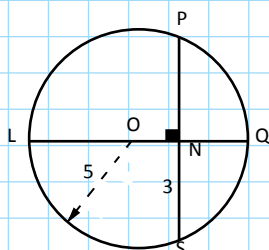
- **Teorema IV :** En una circunferencia, los arcos determinados por cuerdas paralelas son de igual medida.



- **Teorema V :** Siempre dos segmentos tangentes a una circunferencia, trazados desde un punto exterior, son de igual longitud.



Calcule: PQ si $\overline{LQ}$ es diámetro.



Nota:

Las cuerdas equidistan del centro.

Resolución:

Como $\overline{LQ} \perp \overline{PS}$ y por el teorema II
 $PN = NS = 3$

Luego: $(OP)^2 = (PN)^2 + (ON)^2$

$$(5)^2 = (3)^2 + (ON)^2$$

$$(ON)^2 = 16$$

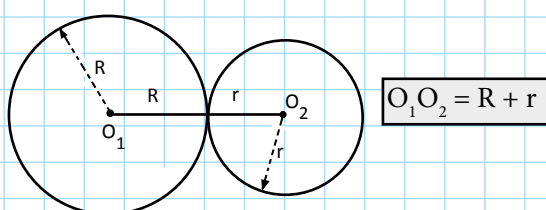
$$ON = 4$$

$$\Rightarrow (PQ)^2 = (PN)^2 + (NQ)^2$$

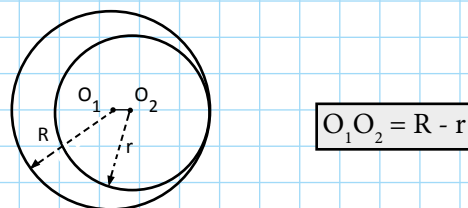
$$(PQ)^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$PQ = \sqrt{10}$$

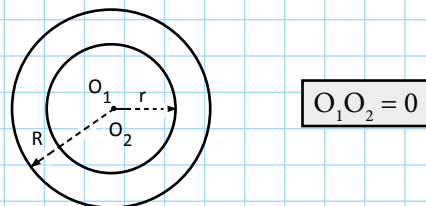
1. Tangentes exteriores



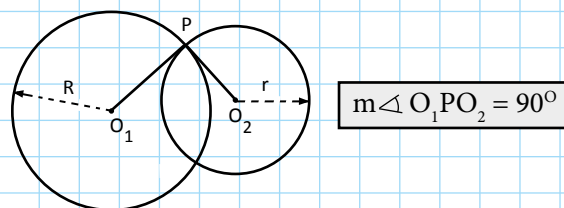
2. Tangentes interiores



3. Concéntricas

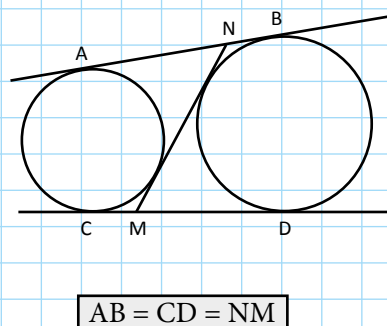


4. Ortogonales



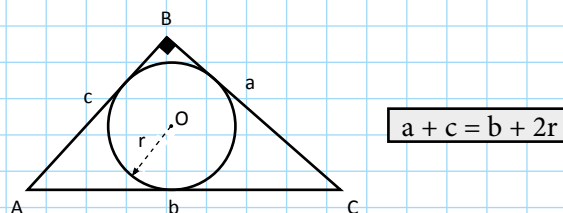
Propiedades

1. Teorema especial

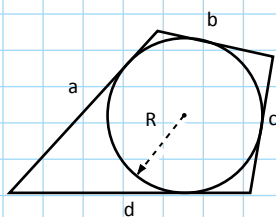


Posiciones Relativas de dos Circunferencias

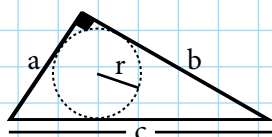
2. Teorema de poncelet



3. Teorema de pitot



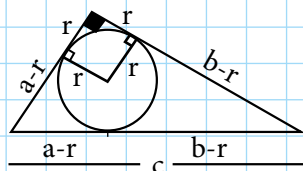
$$a + c = b + d$$



$$a + b = c + 2r$$

Demostración

Llevando el inradio hacia los catetos y por tangentes.



$$a - r + b - r = c$$

Luego: $a + b = c + 2r$



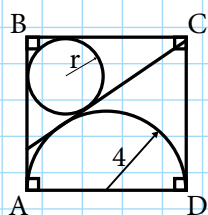
Observación:

Teorema de Poncelet

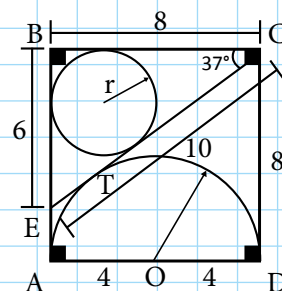
En todo triángulo rectángulo, la suma de la media de los catetos es igual a la hipotenusa más el doble del inradio.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcule "r" si ABCD es un cuadrado.



Resolución:



Sabemos que:

$$m\angle TCD = 53^\circ \Rightarrow m\angle BCE = 37^\circ$$

$\triangle EBC$ notable aproximado, si $BC = 8$

$$\Rightarrow BE = 6 \text{ y } EC = 10$$

Por el teorema de Poncelet en dicho triángulo rectángulo:

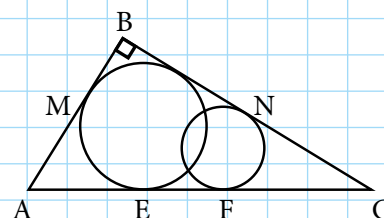
$$6 + 8 = 10 + 2r$$

$$2r = 14 - 10$$

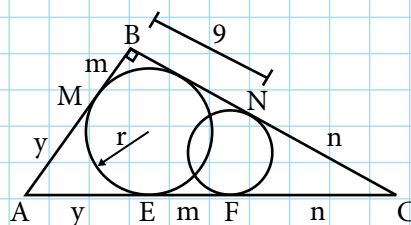
$$2r = 4$$

$$r = 2$$

2. En la figura. Si M, N, E y F son puntos de tangencia; $BM = EF$, $BN = 9$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo ABC.



Resolución:



$$\text{Dato: } BM = EF = m \text{ y } BN = 9$$

Se pide calcular "r".

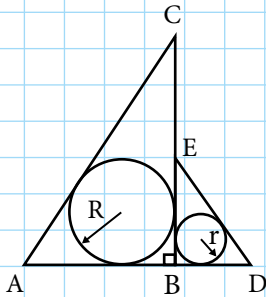
$\triangle ABC$, por el teorema de Poncelet:

$$m + y + 9 + n = 2r + y + m + n$$

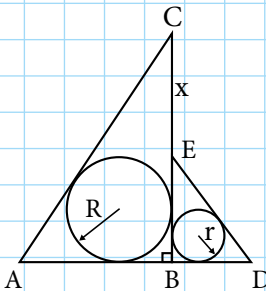
$$2x = 9$$

$$x = 4,5$$

3. En la figura.
Si $AC - AB = ED - BD$, calcule CE.



Resolución:



Por el teorema de Poncelet en el $\triangle ACB$:

$$CE + EB + AB = AC + 2R \quad \dots(1)$$

Por el teorema en el $\triangle EBD$:

$$EB + BD = ED + 2r \quad \dots(2)$$

Restando (1)-(2):

$$CE + EB + AB - EB - BD = AC - ED + 2R - 2r$$

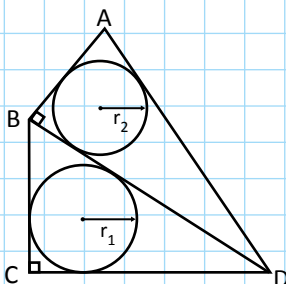
$$CE + (ED - BD) = (AC - AB) + 2R - 2r$$

Por dato: $AC - AB = ED - BD$

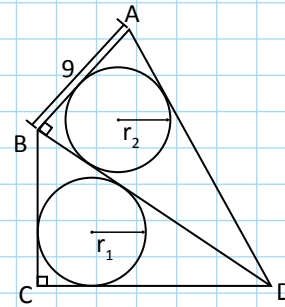
$$CE = 2R - 2r$$

$$x = 2(R - r)$$

4. En la figura, si $AB=9$ y $AD=BC+CD$.
Calcule " r_1+r_2 ".



Resolución:



Por el teorema de Poncelet:

$$\triangle BCD: BC + CD = 2r_1 + BD \quad \dots(1)$$

$$\triangle ABD: AB + BD = AD + 2r_2 \quad \dots(2) \text{ Sumando (1) y (2):}$$

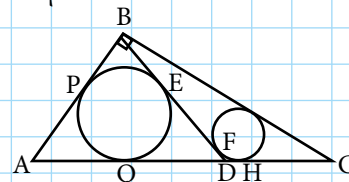
$$\underbrace{(BC + CD)}_{\text{dato AD}} + \underbrace{AB + BD}_9 = AD + BD + 2(r_1 + r_2)$$

$$AD + 9 = AD + 2(r_1 + r_2)$$

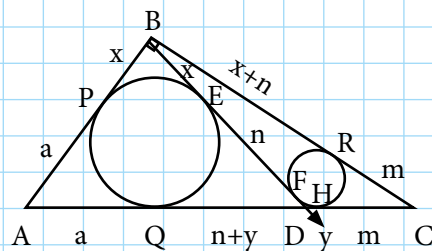
$$r_1 + r_2 = 9/2$$

$$r_1 + r_2 = 4,5$$

5. Calcule la longitud del inradio del triángulo rectángulo ABC si $\overline{BD}$ es ceviana. Además: $BE - FD = 8\mu$



Resolución:



$$\text{Dato: } x - y = 8 \quad \dots(1)$$

Si " r " es la longitud del inradio del $\triangle ABC$; por el teorema de Poncelet tenemos:

$$(a + x) + (x + n + m) = (a + n + y + y + m) + 2r$$

$$2x = 2y + 2r$$

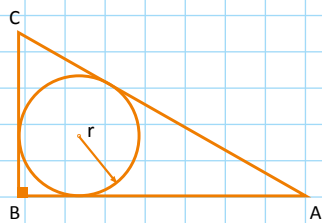
$$r = x - y \quad \dots(2)$$

$$\text{De (1) y (2): } r = 8\mu$$

Trabajando en Clase

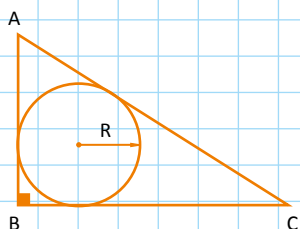
Nivel I

1. Calcula r si $AB=12$ y $BC=15$.



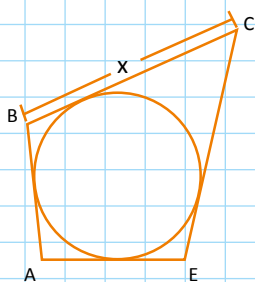
- a) 4 b) 1 c) 2,5
d) 2 e) 3

2. Calcula R si $AB = 3$ y $BC = 4$.



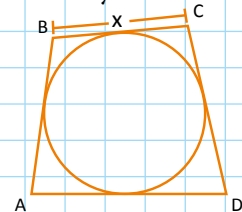
- a) 1 b) 6 c) 2
d) 4 e) 3

3. Calcula x si $AE = 3$, $AB = 4$ y $EC = 7$.



- a) 7 b) 4 c) 9
d) 3 e) 8

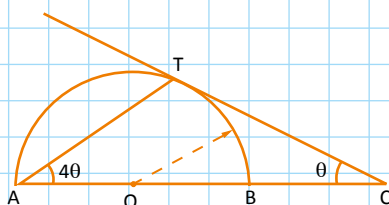
4. Calcula x si $a - b = 4$, $AD = b$, $AB = a$ y $CD = 6$.



- a) 5 b) 11 c) 10
d) 8 e) 12

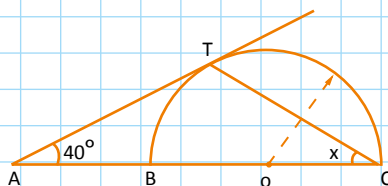
Nivel II

5. Calcula θ (T es punto de tangencia).



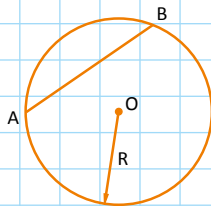
- a) 20° b) 10° c) 5°
d) 30° e) 15°

6. Halla x , siendo T punto de tangencia.



- a) 10° b) 50° c) 25°
d) 40° e) 80°

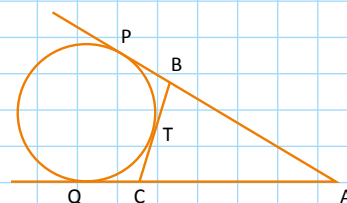
7. Calcula la longitud de la flecha de la cuerda $\overline{AB}$ si $AB = 30$ y $R = 17$.



- a) 5 b) 7 c) 8
d) 4 e) 9

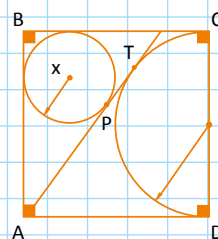
Nivel III

8. Si $BC = 15$, $AB = 13$ y $AC = 14$, calcula AQ (P, Q y T son puntos de tangencia).



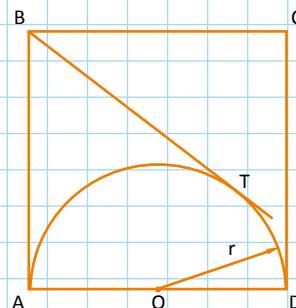
- a) 20 b) 18 c) 15
d) 23 e) 21

9. Si ABCD es un cuadrado y $PT = 2$, calcula x .



- a) 1 b) 1,5 c) 4
d) 8,5 e) 2

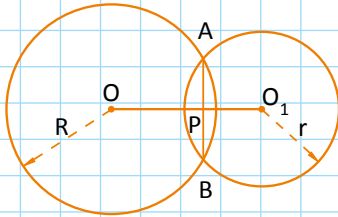
10. Calcula $m\angle TBC$ si ABCD es un cuadrado y T es punto de tangencia.



- a) $53^\circ/2$ b) 30° c) $37^\circ/2$
d) 37° e) 53°

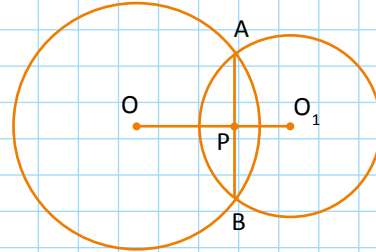
Tarea domiciliaria N° 5

1. Calcula OP si los diámetros de las circunferencias mostradas miden $16\sqrt{5}$ cm y 10 cm, y además $OO_1 = 9$ cm ($R > r$).



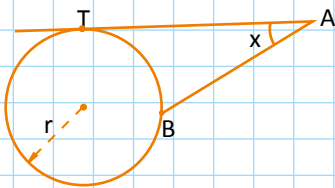
Rpta :

2. Si las circunferencias son ortogonales y los diámetros son 16 cm y 12 cm, calcula OP .



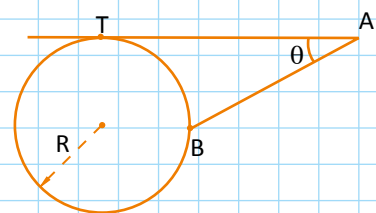
Rpta :

3. Halla x , si T es punto de tangencia, $m\widehat{TB} = 90^\circ$, $AT = 7$ y $r = 3$.



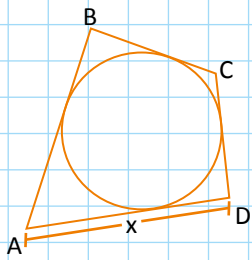
Rpta :

4. Calcula θ si T es punto de tangencia, $m\widehat{TB} = 90^\circ$, $AT = 7$ y $R = 4$.



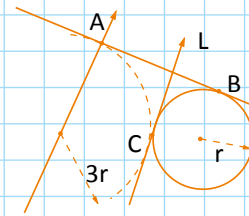
Rpta :

5. Calcula x si $AB = 10$, $CD = 8$ y $BC = 6$.



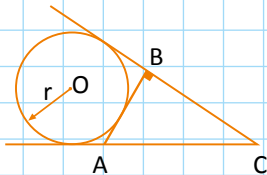
Rpta :

6. Calcula el ángulo determinado por $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OL}$ (A , B y C son puntos de tangencia).



Rpta :

7. Calcula r si $AB = 12\text{m}$ y $BC = 5\text{m}$.



Rpta :

8. En una circunferencia se toman los puntos consecutivos P, Q, R, S, T y V de modo que los ángulos PQR y STV midan 105° y 135° , respectivamente. Calcula la medida del menor ángulo que forman las cuerdas $\overline{PS}$ y $\overline{RV}$.

Rpta :