



ÁNGULOS DE LA CIRCUNFERENCIA



Objetivos:

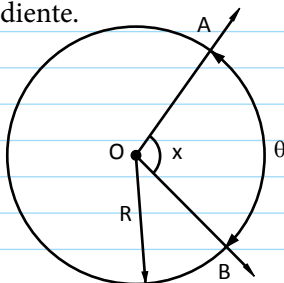
- Conocer el concepto de arco.
- Conocer las propiedades de arco.
- Definir las propiedades de cuadrilátero inscrito o inscriptible.

Introducción

El arco de una circunferencia se puede medir en forma métrica, es decir, en su longitud o en forma angular. Es importante tener medidas angulares iguales, sin embargo, sus longitudes no son necesariamente iguales; parte de esta definición se utiliza en los relojes.

a) Ángulo central

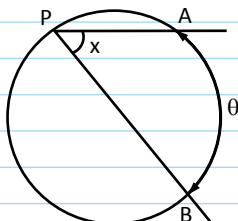
La medida del ángulo central es igual a la de su arco correspondiente.



$\angle AOB$: Ángulo central
 $x = \theta$

b) Ángulo Inscrito

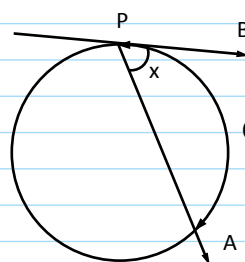
Es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos secantes.



$\angle APB$: Ángulo inscrito
 $x = \frac{\theta}{2}$

c) Ángulo Semiinscrito

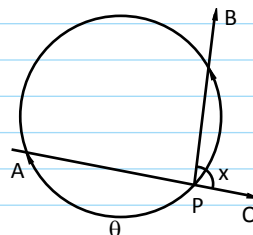
Es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia, siendo uno de sus lados tangente y el otro secante.



$\angle APB$: Ángulo semiinscrito
 $x = \frac{\theta}{2}$

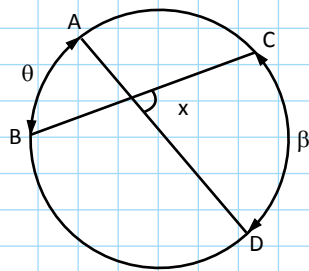
d) Ángulo Exinscrito

Es el ángulo adyacente al ángulo inscrito.



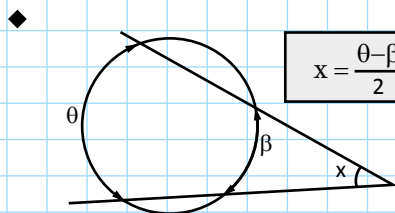
$\angle BPQ$: Ángulo exinscrito
 $x = \frac{\theta}{2}$

e) Ángulo Interior

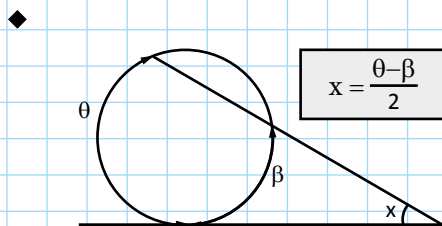


$$x = \frac{\theta + \beta}{2}$$

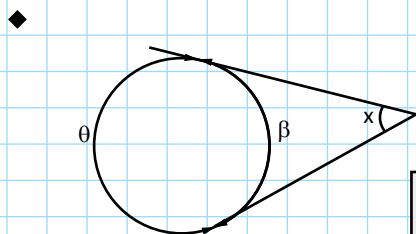
f) Ángulo Exterior



$$x = \frac{\theta - \beta}{2}$$



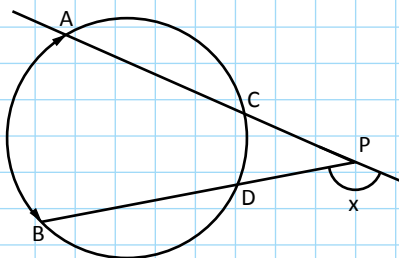
$$x = \frac{\theta - \beta}{2}$$



$$x = \frac{\theta - \beta}{2}$$

Ejemplo:

- 1) Calcule x si $m\widehat{AB} = 80^\circ$ y $m\widehat{CD} = 20^\circ$.



Resolución:

Del gráfico: $m\angle CPD = \frac{m\widehat{AB} - m\widehat{CD}}{2}$

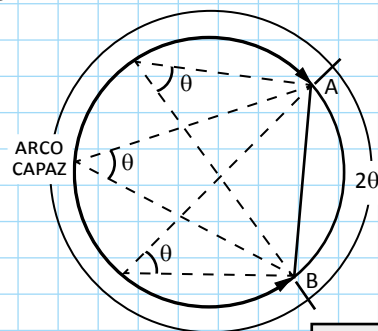
$$m\angle CPD = \frac{80^\circ - 20^\circ}{2} = 30^\circ$$

pero $x + m\angle CPD = 180^\circ$

$$\rightarrow x = 150^\circ$$

Arco capaz

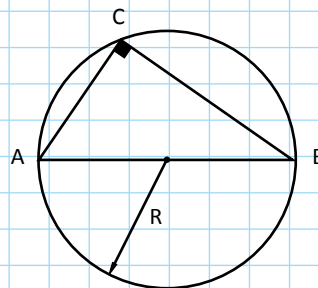
Es aquel arco en el cual los ángulos inscritos en este arco son iguales.



Arco AB : $\widehat{AB}$
es un arco capaz

Propiedades

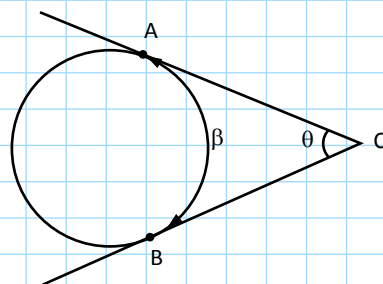
Teorema 1



Si AB es diámetro:

$$\angle ACB = 90^\circ$$

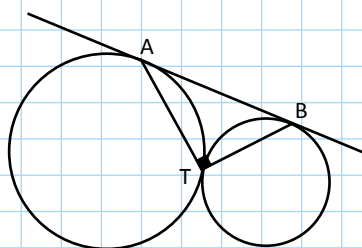
Teorema 2



Si A y B son puntos de tangencia:

$$\theta + \beta = 180^\circ$$

◆ **Teorema 3**

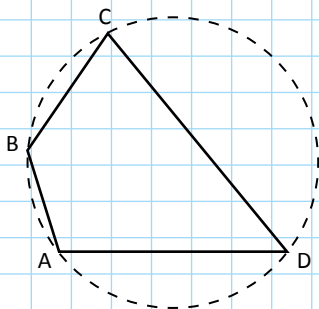


Si A, B y T son puntos de tangencia:

$$\angle ATB = 90^\circ$$

Cuadrilátero Inscrito

Es aquel cuadrilátero convexo que puede inscribirse en una circunferencia. Sus cuatro vértices pueden ser ubicados en una misma circunferencia.



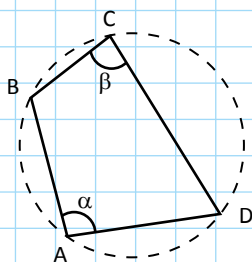
Si A, B, C y D pueden ser ubicados en una misma circunferencia, entonces:

$$\triangle ABCD : \text{INSCRIPTIBLE}$$

* **Condición para que un cuadrilátero sea inscriptible**

a) **Primer caso:**

Todo cuadrilátero convexo cuyos ángulos interiores opuestos son suplementarios, es inscriptible.

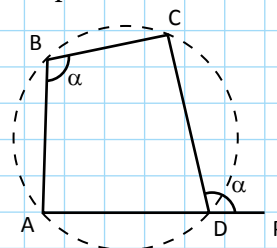


Si $\alpha + \beta = 180^\circ$, entonces:

$$\triangle ABCD : \text{INSCRIPTIBLE}$$

b) **Segundo caso:**

Todo cuadrilátero convexo, cuyo ángulo interior es igual al ángulo opuesto exterior, es inscriptible.

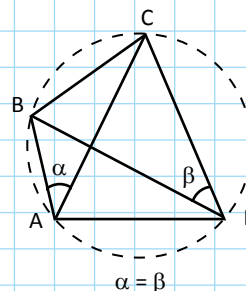


Si $m\angle ABC = m\angle CDP$, entonces:

$$\triangle ABCD : \text{INSCRIPTIBLE}$$

c) **Tercer caso:**

Todo cuadrilátero convexo cuyas diagonales determinan con dos lados opuestos ángulos de igual medida, es inscriptible.

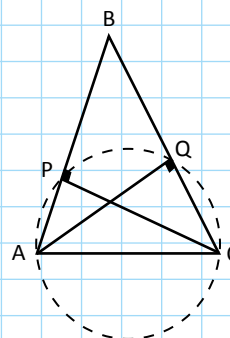


Si $\alpha = \beta$, entonces:

$$\triangle ABCD : \text{INSCRIPTIBLE}$$

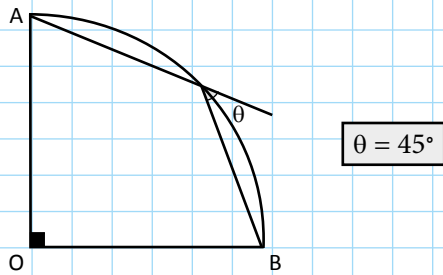
Propiedades

◆ **Teorema 1**

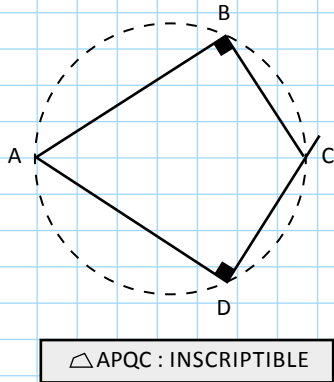


$$\triangle APQC : \text{INSCRIPTIBLE}$$

◆ Teorema 2

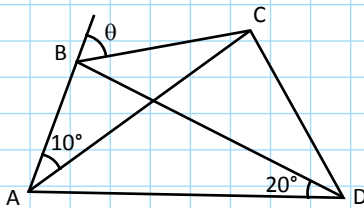


◆ Teorema 3



Ejemplo:

Si ABCD es inscriptible, calcula el valor de θ .



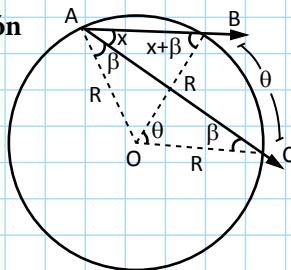
Resolución:

Como ABCD es inscriptible, entonces:

$$\theta = m\angle ADC = 20^\circ + m\angle BDC$$

$$\text{Pero : } m\angle BDC = 10^\circ \rightarrow \theta = 30^\circ$$

Demostración



1) $\overline{OA}$; $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ (Radios)

2) $\triangle AOB$ (Isósceles)

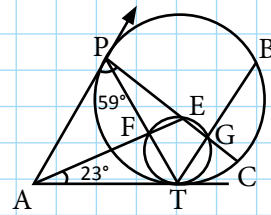
$\rightarrow \triangle OAC$ (Isósceles)

Luego: $x + x + \beta = \theta + \beta$

$$\begin{aligned} 2x &= \theta \\ x &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

1) Según el gráfico, calcula $m\widehat{PB} + m\widehat{TC}$.



a) 170°

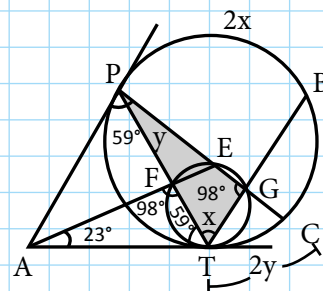
b) 150°

c) 164°

d) 160°

e) 154°

Resolución:



$\triangle APT$ isósceles: $m\angle APT = m\angle ATP = 59^\circ$

$\triangle AFT$: $m\angle AFT = 180^\circ - (23^\circ + 59^\circ)$

$$m\angle AFT = 98^\circ$$

En el cuadrilátero inscrito FEGT:

$$m\angle EGT = m\angle AFT = 98^\circ$$

En el $\triangle PGT$: $x + y = 180^\circ - 98^\circ$

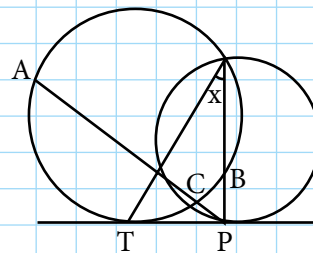
$$x + y = 82^\circ$$

Luego: $2x + 2y = 164^\circ$

$$m\widehat{PB} + m\widehat{TC} = 164^\circ$$

2) En el gráfico; T y P son puntos de tangencia, además

$$m\widehat{AT} + m\widehat{BC} = 148^\circ. \text{ Calcule } x.$$



a) 32°

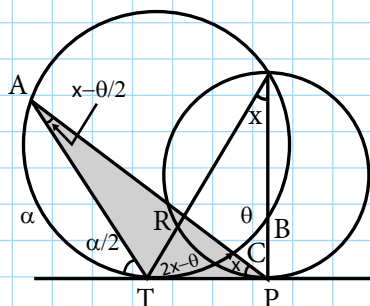
b) 37°

c) 42°

d) 46°

e) 52°

Resolución:



Por dato: $\alpha + \theta = 148^\circ \dots (1)$

De la figura:

$$m\widehat{TC} = 2x - \theta \Rightarrow m\angle A = x \frac{\theta}{2}$$

$$m\widehat{RP} = 2x \Rightarrow m\angle RPT = x$$

En el $\triangle TAP$; por teorema del ángulo exterior:

$$\frac{\alpha}{2} = x - \frac{\theta}{2} + x$$

$$2x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

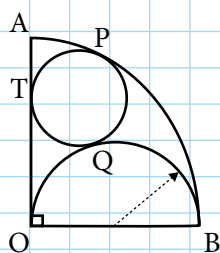
$$x = \frac{\alpha + \theta}{4} \dots (2)$$

$$(1) \text{ en } (2) \ x = \frac{148^\circ}{4}$$

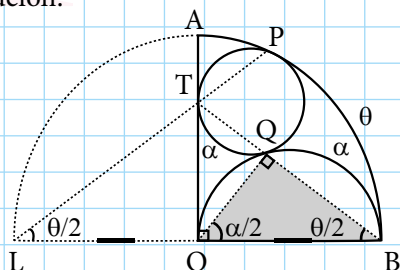
$$x = 37^\circ$$

- 3) Según el gráfico; T, P y Q son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{TQ} + m\widehat{PB}$.

- a) 120°
- b) 135°
- c) 150°
- d) 180°
- e) 270°



Resolución:



Los puntos colineales son:

L, T y P; T, Q y B

$\overline{TO}$ es mediatriz de $\overline{LB}$, entonces el $\triangle LTB$ es isósceles:

$$m\angle L = m\angle B = \theta/2$$

$$\text{Pero: } m\widehat{TQ} = m\widehat{QB} = \alpha$$

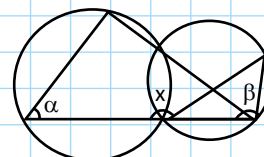
Finalmente en el $\triangle OQB$:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \theta = 180^\circ$$

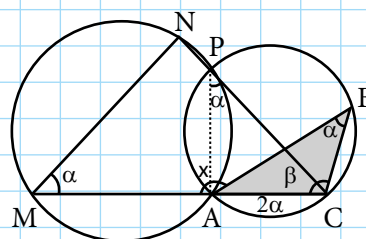
$$m\widehat{TQ} + m\widehat{PB} = 180^\circ$$

- 4) En el gráfico; $\alpha + \beta = 150^\circ$. Calcule x.

- a) 130°
- b) 140°
- c) 150°
- d) 160°
- e) 170°



Resolución:



Dato: $\alpha + \beta = 150^\circ \dots (1)$

En el cuadrilátero inscrito MNPA se cumple:

$$m\angle M = m\angle APC = \alpha$$

En la circunferencia menor:

$$m\angle APC = m\angle B = \alpha$$

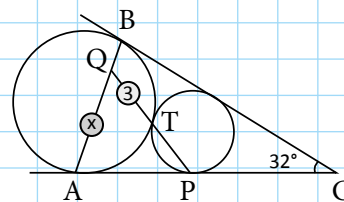
Finalmente en el $\triangle ABC$:

$$x = \alpha + \beta$$

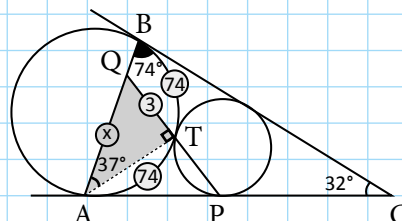
$$x = 150^\circ$$

- 5) En la figura mostrada, calcula x.

- a) 1μ
- b) 2μ
- c) 3μ
- d) 4μ
- e) 5μ



Resolución:



En primer lugar sabemos que la $m\angle ATP = 90^\circ$

Por otro lado: $m\widehat{AT} = m\widehat{TB} = 74^\circ$

Entonces la $m\angle TAQ = 37^\circ$

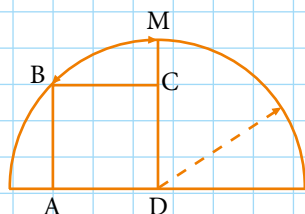
Luego en el $\triangle ATQ$:

$$x = 5\mu$$

Trabajando en Clase

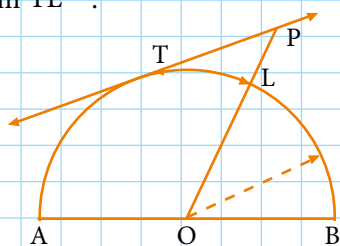
Nivel I

1. Calcula $m\widehat{BM}$ si ABCD es un cuadrado.



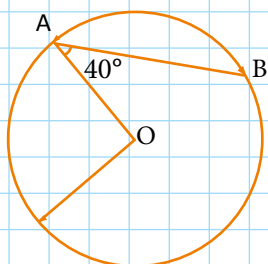
- a) 20° b) 30° c) 45°
d) 53° e) 60°

2. Si $TP = 4$ y $AB = 6$, calcula $m\widehat{TL}$.



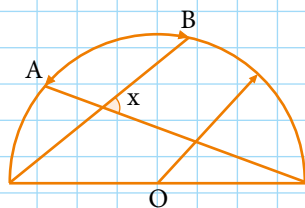
- a) 30° b) 37° c) 45°
d) 53° e) 60°

3. Calcula $m\widehat{AB}$.



- a) 20° b) 40° c) 50°
d) 80° e) 100°

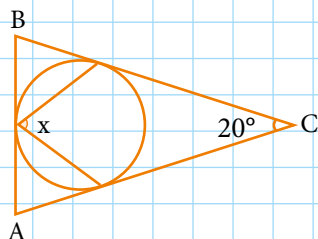
4. Calcula x si $m\widehat{AB} = 80^\circ$.



- a) 20° b) 40° c) 50°
d) 60° e) 80°

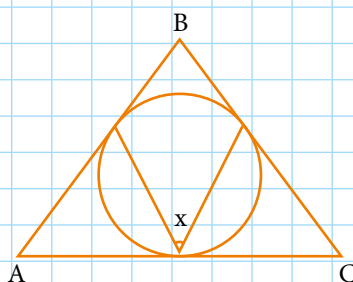
Nivel II

5. Halla x.



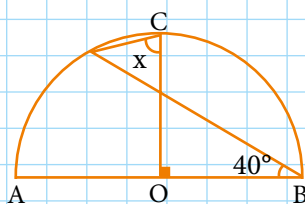
- a) 50° b) 60° c) 70°
d) 80° e) 30°

6. En la figura, halla x si $m\angle A + m\angle C = 100^\circ$.



- a) 80° b) 60° c) 50°
d) 40° e) 45°

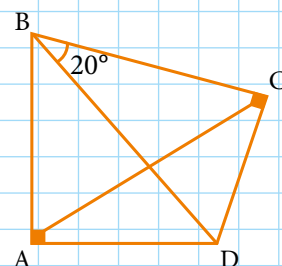
7. Calcula x si O es centro.



- a) 65° b) 85° c) 55°
d) 45° e) 75°

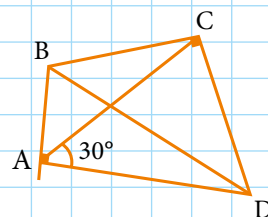
Nivel III

8. Calcula $m\angle BAC$.



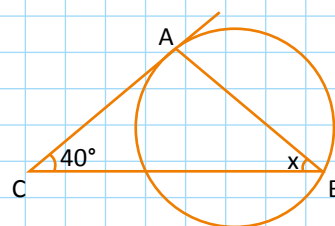
- a) 50° b) 10° c) 20°
d) 40° e) 70°

9. Calcula AB si $CD = 2\sqrt{2}$ y $AD = \sqrt{7}$.



- a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) 5
d) 4 e) 2

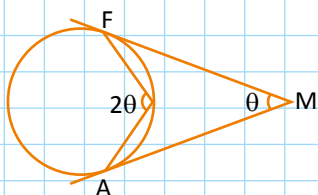
10. Halla x si $m\widehat{AB} = 100^\circ$.



- a) 5° b) 50° c) 36°
d) 68° e) 10°

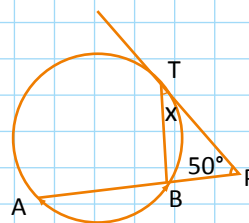
Tarea domiciliaria N° 6

1. En la figura, halla θ .



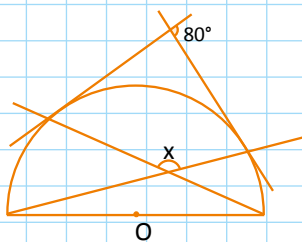
Rpta :

2. Si $\widehat{AB} = 140^\circ$ y $m\angle APT = 50^\circ$, calcula x .



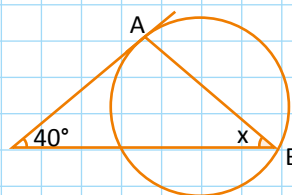
Rpta :

3. Calcula x si O es centro.



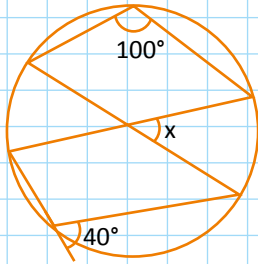
Rpta :

4. Halla x si $m\widehat{AB} = 100^\circ$.



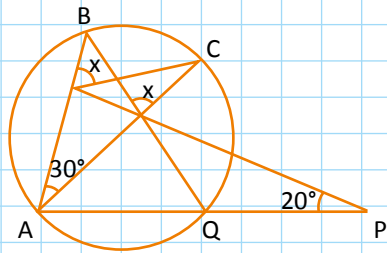
Rpta :

5. Calcula x .



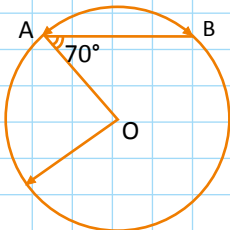
Rpta :

6. Calcula x .



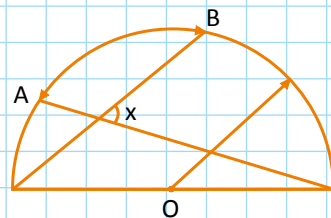
Rpta :

7. Calcula $m\widehat{AB}$ si $m\angle OAB = 40^\circ$.



Rpta :

8. Calcula x si $m\widehat{AB} = 60^\circ$.



Rpta :