



ANÁLISIS VECTORIAL

Análisis vectorial I

• Marco teórico

En nuestra vida diaria, las rectas direccionales (flechas) son muy importantes pues nos informan hacia dónde ir cuando no conocemos un determinado destino.

En física la importancia de direccionar algunas magnitudes permite una mejor comprensión del fenómeno.

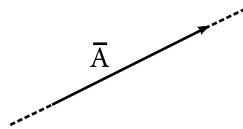
Por ejemplo, si decimos que un carro se acerca con una velocidad de 20m/s uno no sabe, en principio, en qué dirección viaja el carro. En contraste a ello, si se dijera que se acerca un carro a la derecha de la persona, en este caso la persona tendrá una mejor información.

Aquellas magnitudes físicas que dependen de una dirección se denominan magnitudes vectoriales, y a cada una de ellas se le representa mediante un **VECTOR**.

VECTOR

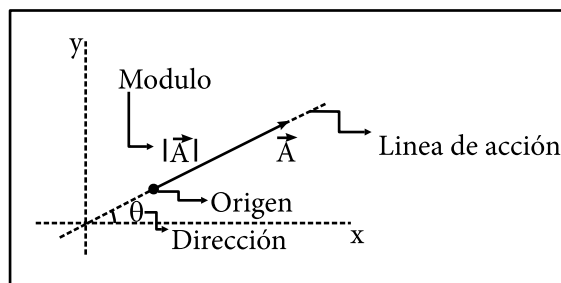
Herramienta matemática que se utiliza para representar magnitudes vectoriales. Se representa gráficamente mediante un segmento de recta orientado (flecha).

Representación:



Notación: $\vec{A}$: vector A

Elementos de un vector

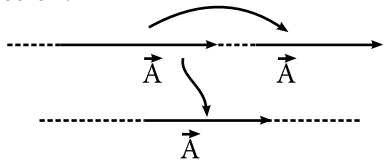


NOTA:

- El módulo de un vector también se puede denotar solamente con la letra (sin la flecha)
Sea $\vec{A}$ el vector, el módulo de un vector se denota:

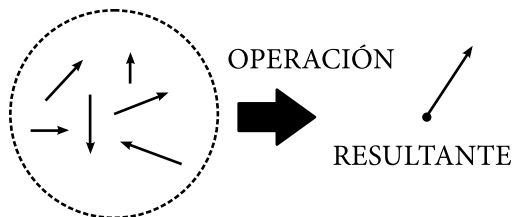
$$|\vec{A}| = A$$

- Un vector puede ubicarse en cualquier punto de su línea de acción e incluso puede trasladarse a líneas de acción paralelas sin que se altere su módulo ni su dirección.



Resultante de vectores

Es el resultado (RESULTANTE) que se obtiene de un conjunto de vectores mediante una operación vectorial.



Existen diferentes métodos para obtener dicha resultante, entre ellos tenemos:

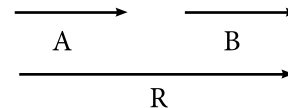
- Vectores paralelos
- Método del polígono

- Método del paralelogramo
- Descomposición rectangular

Vectores paralelos

Para dos vectores paralelos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cuyos módulos son A y B, existen dos casos para obtener una resultante.

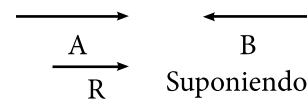
1^{er} Caso:



$$\boxed{R = A + B}$$

(Resultante máxima)

2^{do} Caso:

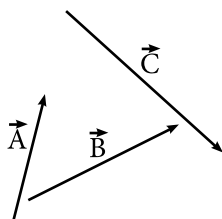


$$\boxed{R = A - B}$$

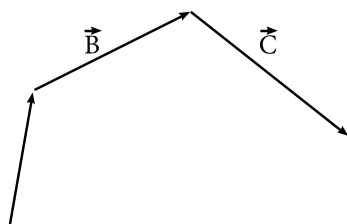
(Resultante mínima)

MÉTODO DEL POLÍGONO

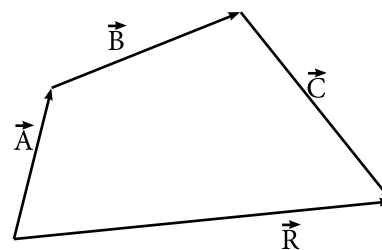
Si se tiene tres vectores dispuestos de la siguiente manera:



Lo primero que tenemos que hacer es ordenar a los vectores uno detrás de otro



El vector resultante $\vec{R}$ se traza como se muestra a continuación



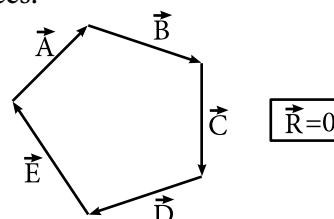
Dónde:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}$$

¡Esta suma es vectorial no escalar!

Observación: Si al colocar los vectores uno a continuación del otro, se obtiene un polígono cerrado; la resultante es nula.

Entonces:

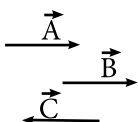


Trabajando en Clase

Nivel I

1. Calcula el módulo de $\vec{D} = 2\vec{A} + 3\vec{B} - \vec{C}$ si se tiene tres vectores paralelos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ donde:

$$|\vec{A}| = 3u; |\vec{B}| = 5u; |\vec{C}| = 4u$$

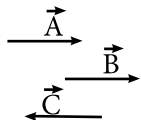


- a) 25 u b) 20u
c) 16 u d) 10 u
e) 30 u

2. Calcula el módulo de $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$

Considere:

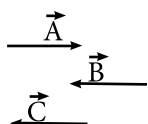
$$|\vec{A}| = 5u, |\vec{B}| = 6u, |\vec{C}| = 4u$$



- a) 5 u b) 10 u
c) 15 u d) 20 u
e) 30 u

3. Determina el módulo de $|\vec{R}| = 2\vec{A} + 3\vec{B} + \vec{C}$ sabiendo que:

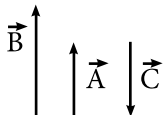
$$|\vec{A}| = 4u, |\vec{B}| = 3u, |\vec{C}| = 6u$$



- a) 2 u b) 7 u
c) 6 u d) 8 u
e) 9 u

4. Determina el módulo de $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} - \vec{C}$, sabiendo que:

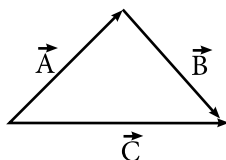
$$|\vec{A}| = 6u, |\vec{B}| = 5u, |\vec{C}| = 4u$$



- a) 1 u b) 2 u
c) 3 u d) 4 u
e) 5 u

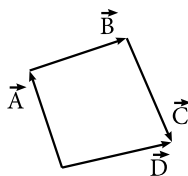
Nivel II

5. Calcula el vector resultante en el siguiente gráfico.



- a) $2\vec{A}$ b) $2\vec{C}$
c) $3\vec{A}$ d) $2\vec{B}$
e) $\vec{A}$

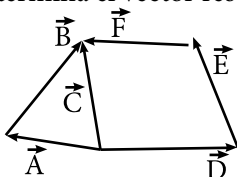
6. Determina el vector resultante en el siguiente gráfico.



- a) $4\vec{D}$ b) $3\vec{D}$
c) $\vec{D}$ d) $2\vec{D}$
e) 0

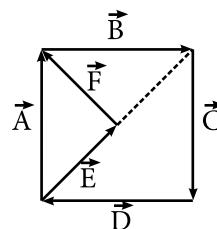
Nivel III

7. Determina el vector resultante.



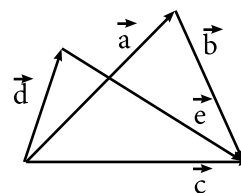
- a) $2\vec{C}$
b) $3\vec{C}$
c) $3\vec{A}$
d) $4\vec{C}$
e) $3\vec{B}$

8. En la figura, $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = |\vec{D}|$ y $|\vec{E}| = |\vec{F}|$. Determina el vector resultante de los vectores mostrados.



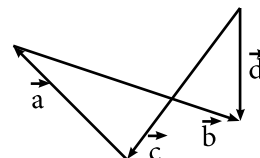
- a) $\vec{B}$ b) $\vec{A}$ c) $\vec{D}$
d) 0 e) $2\vec{A}$

9. Calcula la resultante.



- a) $2\vec{d}$ b) $2\vec{e}$ c) $3\vec{c}$
d) $4\vec{D}$ e) 0

10. Calcula la resultante a partir del siguiente gráfico.



- a) $\vec{a}$ b) $2\vec{c}$ c) $3\vec{d}$
d) 0 e) $2\vec{d}$



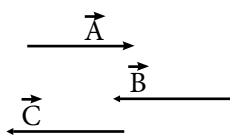
• Tarea

Nivel I

1. A partir del siguiente sistema de vectores mostrados determina el módulo de $\vec{D}$.

$$\vec{D} = \vec{A} + 3\vec{B} - 6\vec{C}$$

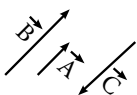
Donde $|\vec{A}| = 7u$; $|\vec{B}| = 1u$; $|\vec{C}| = 4u$



- a) 21 u
b) 22 u
c) 28 u
d) 29 u
e) 30 u
2. Del sistema mostrado calcula el módulo de $\vec{T}$.

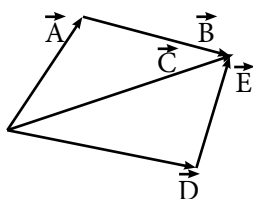
$$\vec{T} = 13\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C}$$

Dónde $|\vec{A}| = 1u$; $|\vec{B}| = 10u$; $|\vec{C}| = 4u$



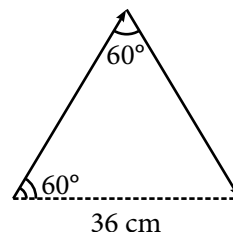
- a) 35 u
b) 30 u
c) 28 u
d) 20 u
e) 36 u
3. Determina el vector resultante a partir del siguiente conjunto de vectores mostrados.

- a) $\vec{C}$
b) $2\vec{C}$
c) $3\vec{C}$
d) $3\vec{B}$
e) $2\vec{D}$



4. Calcula el valor de la resultante de los vectores mostrados en la figura.

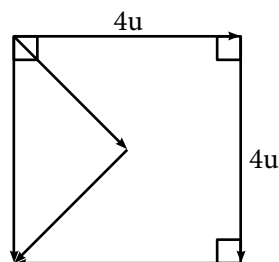
- a) 30 cm
b) 31 cm
c) 33 cm
d) 34 cm
e) 36 cm



Nivel II

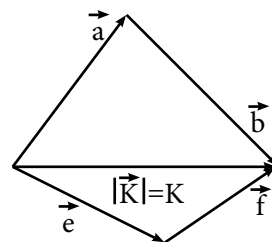
5. Determina el módulo del vector resultante si los vectores externos forman un cuadrado.

- a) 4 u
b) 8 u
c) 6 u
d) 12 u
e) 16 u



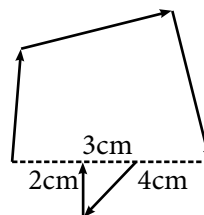
6. Calcula el módulo de la resultante a partir del siguiente conjunto de vectores.

- a) 6 K
b) 2 K
c) K
d) 0
e) 3 K



7. Calcula el módulo de la resultante.

- a) 2 cm
b) 3 cm
c) 4 cm
d) 5 cm
e) 6 cm



Nivel III

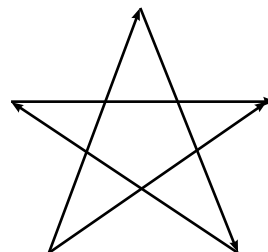
8. Si el módulo de la resultante máxima de dos vectores es 30 cm y el módulo de la mínima es 4 cm, calcula el módulo del vector de menor módulo.

a) 4 cm
b) 30 cm
c) 13 cm
d) 17 cm
e) 20 cm

9. Si el módulo de la resultante máxima de dos vectores es 13 cm y el módulo de la mínima es 5, calcula el cociente de los valores de los vectores.

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{9}{4}$
d) 4
e) 9

10. Calcula el módulo de la resultante del siguiente sistema de vectores, si cada lado de la estrella mide 10 u.



a) 50 u
b) 40 u
c) 30 u
d) 20 u
e) 10 u



Análisis vectorial II

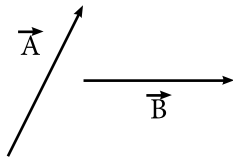
• Marco teórico

Existen métodos algebraicos para poder determinar la resultante de un conjunto de vectores.

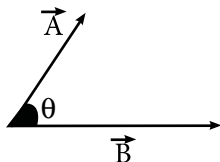
En este capítulo vamos a estudiar dos métodos prácticos y técnicos, con el objetivo de obtener una resultante de un conjunto de vectores.

MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

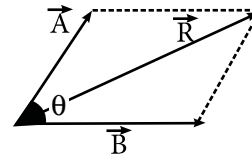
Se tienen dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como se muestra en la figura:



Para utilizar este método los vectores tienen que unirse por sus orígenes formando un ángulo θ , para ello se tienen que desplazar paralelamente de sus posiciones originales.



Luego, se traza la resultante partiendo del origen común de los vectores hasta la unión de las rectas paralelas de los vectores originarios.



$\vec{R}$: vector resultante

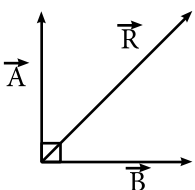
Donde su módulo se calcula aplicando la siguiente ecuación:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

CASOS ESPECIALES

Para calcular el módulo la resultante ($\vec{R}$) de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

- Si $\theta = 90^\circ$



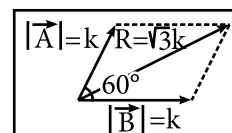
Dónde:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2}$$

Nota:

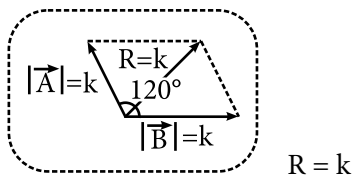
Cuando los vectores forman 90° también podemos hacer uso de los triángulos rectángulos.

- Si se tiene dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de módulos iguales a un valor "k" y el ángulo θ formarlos por ellos es igual a 60° .

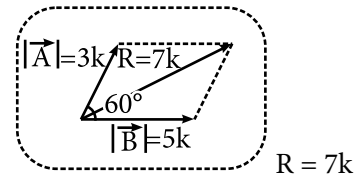


$$R = \sqrt{3}k$$

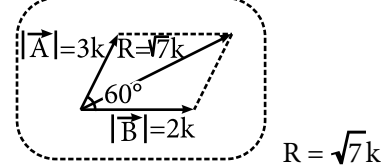
- Si se tienen dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de módulos iguales a un valor "k", y el ángulo θ formado por ellos es igual a 120° .



- Si se tienen dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de módulos $|\vec{A}| = 3k$ y $|\vec{B}| = 5k$. Además el ángulo θ formado por ellos es igual a 60° .

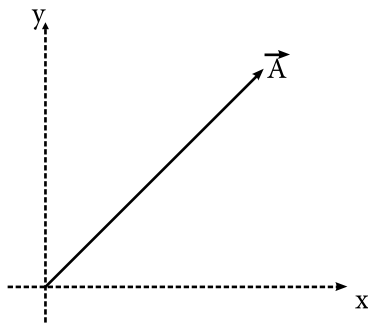


- Si se tienen dos vectores $|\vec{A}| = k$ y $|\vec{B}| = 2k$ además el ángulo θ formado por ellos es igual a 60° .

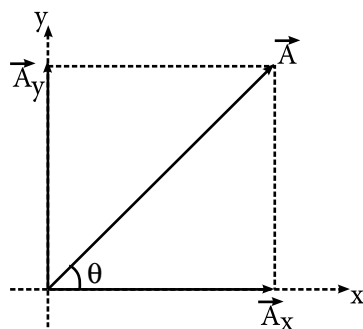


DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR

Para este caso ubicaremos al vector en un sistema de coordenadas cartesianas x - y.



Luego, desde el origen del vector se trazan las componentes rectangulares tal como señala la siguiente figura:



Dónde:

$\vec{A}_x$: Vector componente abscisa.

$\vec{A}_y$: Vector componente ordenada.

Los módulos de las componentes se calculan de la siguiente manera:

$$|\vec{A}_x| = A \cos \theta$$

$$|\vec{A}_y| = A \sin \theta$$

Se cumple además que el módulo de un vector se puede calcular a partir del valor de sus componentes, en nuestro caso sería:

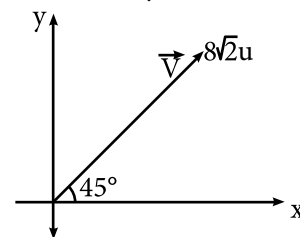
$$|\vec{A}| = \sqrt{|\vec{A}_x|^2 + |\vec{A}_y|^2}$$

Nota:

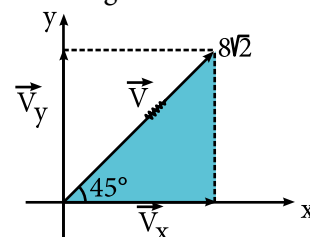
Los componentes de un vector se pueden calcular utilizando también los triángulos notables.

Ejemplo:

Calcula el módulo de las componentes rectangulares del vector $\vec{V}$ de módulo $8\sqrt{2}u$.



Lo primero que hacemos es trazar las líneas paralelas a los ejes, luego se trazan los componentes vectoriales, anulando al vector origen $\vec{V}$.



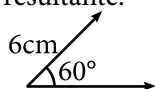
A partir del triángulo notable $45^\circ - 45^\circ$ (triángulo sombreado en la gráfica) se obtiene el módulo de las componentes:

$$\therefore |\vec{V}_x| = 8u ; |\vec{V}_y| = 8u$$

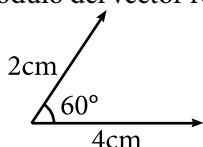
• Trabajando en Clase

Nivel I

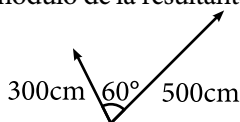
1. Si dos vectores de módulos 6 cm y 10 cm forman un ángulo de 60° tal como se muestra en la figura, calcula el módulo del vector resultante.



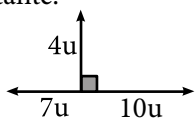
- a) 6 cm b) 10 cm c) 14 cm
d) 12 cm e) 8 cm
2. Se tiene dos vectores de módulos 2 cm y 4 cm los cuales forman un ángulo de 60° , calcula el módulo del vector resultante.



- a) $2\sqrt{7}$ cm b) $\sqrt{7}$ cm c) 14 cm
d) 4 cm e) $\sqrt{5}$ cm
3. Si dos vectores de módulos 300 cm y 500 cm forman 60° , calcula el módulo de la resultante.



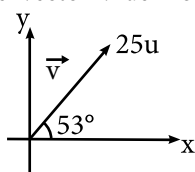
- a) 100 cm b) 200 cm
c) 700 cm d) 180 cm
e) 500 cm
4. Calcula el módulo del vector resultante.



- a) 1 u b) 2 u c) 3 u
d) 4 u e) 5 u

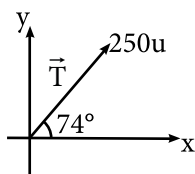
Nivel II

5. Calcula el módulo y la dirección de las componentes rectangulares del vector $\vec{V}$ de módulo 25 u.



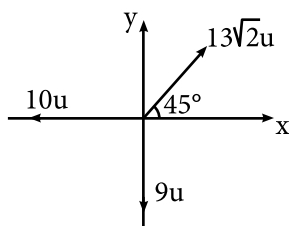
- a) 20 u ($\uparrow$) b) 10 u ($\uparrow$)
15 u ($\rightarrow$) 5 u ($\rightarrow$)
c) 30 u ($\uparrow$) d) 60 u ($\uparrow$)
40 u ($\rightarrow$) 80 u ($\rightarrow$)
e) 15 u ($\uparrow$)
20 u ($\rightarrow$)

6. Calcula la suma de los componentes rectangulares del vector $\vec{T}$ de módulo 250 u.



- a) 300 u b) 400 u c) 500 u
d) 310 u e) 410 u

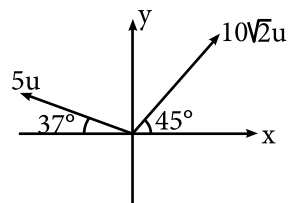
7. Calcula el módulo del vector resultante.



- a) 1 u b) 2 u
c) 3 u d) 4 u
e) 5 u

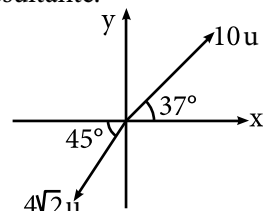
Nivel III

8. Calcula el módulo del vector resultante.



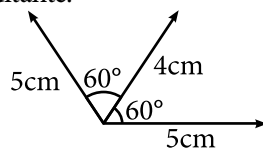
- a) $\sqrt{200}$ u b) $\sqrt{201}$ u
c) $\sqrt{202}$ u d) $\sqrt{206}$ u
e) $\sqrt{205}$ u

9. Calcula el módulo del vector resultante.

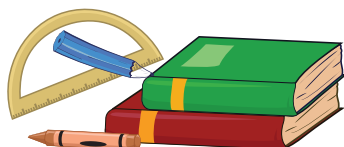


- a) $\sqrt{5}$ u b) $2\sqrt{5}$ u
c) $3\sqrt{5}$ u d) $\sqrt{7}$ u
e) $\sqrt{8}$ u

10. Calcula el módulo del vector resultante.



- a) 4 cm
b) 5 cm
c) 9 cm
d) 13 cm
e) 19 cm

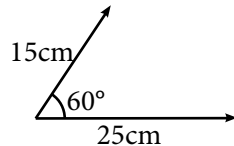


Tarea

Nivel I

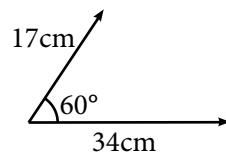
1. Si dos vectores de módulos 25 cm y 15 cm forman un ángulo de 60° tal como se muestra en la figura, calcula el módulo del vector resultante.

- a) 15 cm
b) 25 cm
c) 35 cm
d) 45 cm
e) 5 cm



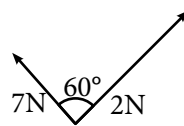
2. Si dos vectores de módulos 17 cm y 34 cm forman un ángulo de 60° tal como se muestra en la figura, calcula el módulo del vector resultante.

- a) $16\sqrt{7}$ cm
b) $17\sqrt{7}$ cm
c) $17\sqrt{3}$ cm
d) 0
e) 7 cm



3. Usando la fórmula de la ley de cosenos aplicada a vectores, calcula el módulo de la resultante de los vectores mostrados.

- a) $\sqrt{57}$ N
b) $\sqrt{47}$ N
c) $\sqrt{7}$ N
d) 67 N
e) $\sqrt{67}$ N



4. Si el módulo de la máxima resultante de dos vectores es 17 u y el módulo de su mínima resultante es 7 u, ¿cuál será el módulo de la resultante cuando formen un ángulo de 90° ?

- a) 5 u
b) 6 u
c) 13 u
d) 14 u
e) 0

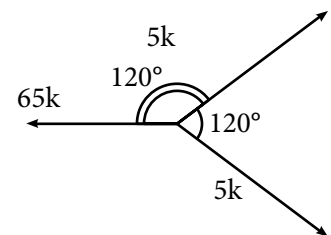
Nivel II

5. Si el módulo de la máxima resultante de dos vectores es 16 N y el módulo de su mínima resultante es 4 N, ¿cuál será el módulo de la resultante cuando formen un ángulo de 60° ?

- a) 14 N
b) 12 N
c) 6 N
d) 10 N
e) 15 N

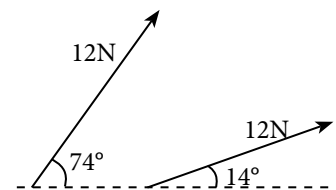
6. Determina el módulo de la resultante del conjunto de vectores.

- a) 20 k
b) 40 k
c) 60 k
d) 80 k
e) 100 k



7. Calcula el módulo del vector resultante.

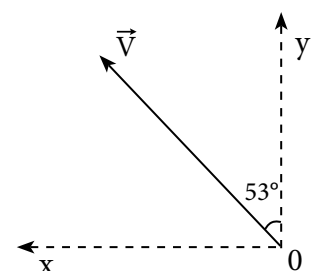
- a) $6\sqrt{3}$ N
b) $12\sqrt{2}$ N
c) $14\sqrt{2}$ N
d) $15\sqrt{3}$ N
e) $12\sqrt{3}$ N



Nivel III

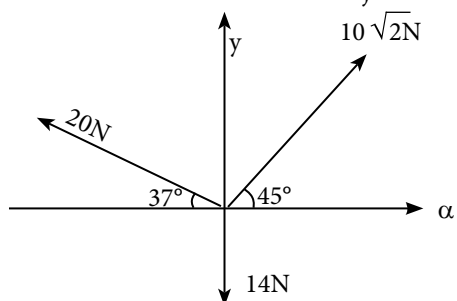
8. Dado el vector $\vec{V}$ de módulo 30 u, calcula el módulo de sus componentes rectangulares (x e y respectivamente)

- a) 24 u ; 18 u
b) 18 u ; 24 u
c) 12 u ; 10 u
d) 30 u ; 18 u
e) 36 u ; 48 u



9. Calcula el módulo de la resultante del conjunto de vectores.

- a) 50 N
- b) 40 N
- c) 30 N
- d) 20 N
- e) 10 N



10. Calcula el módulo de la resultante.

- a) $2a$
- b) $3a$
- c) $20\sqrt{3}a$
- d) $a\sqrt{3}$
- e) $3\sqrt{3}a$

